Inferência em redes Bayesianas

Ano Lectivo 2013/2014 - 1^o Semestre (14.4 - 14.5) – Adaptado de http://aima.eecs.berkeley.edu/slides-tex/

Resumo

- ♢ Inferência exacta por enumeração
- ♢ Inferência exacta por eliminação de variáveis
- ♢ Inferência aproximada por simulação estocástica

Tarefas de inferência

Interrogações simples: calcular distribuição marginal a posteriori $\mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})$
e.g., $P(NoGas|Gauge=empty, Lights=on, Starts=false)$

Interrogações conjuntivas: $\mathbf{P}(X_i, X_j|\mathbf{E}=\mathbf{e}) = \mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})\mathbf{P}(X_j|X_i, \mathbf{E}=\mathbf{e})$

Decisões óptimas: redes de decisão incluem informação de utilidade;
inferência probabilística necessária para $P(outcome|action, evidence)$

Valor da informação: que evidência procurar a seguir?

Análise de sensibilidade: quais os valores de probabilidade mais críticos?

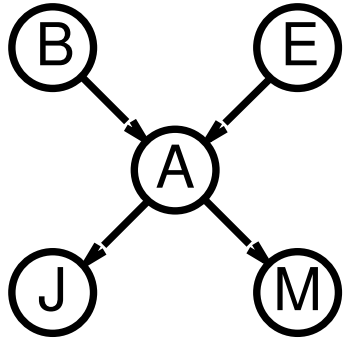
Explicação: por que é que preciso de um novo motor de arranque?

Inferência por enumeração

Forma relativamente inteligente de somar variáveis da distribuição conjunta sem necessitar de construir a sua representação explícita

Interrogação simples na rede do assaltante:

$$\mathbf{P}(B|j,m)$$
$$= \mathbf{P}(B,j,m)/P(j,m)$$
$$= \alpha\mathbf{P}(B,j,m)$$
$$= \alpha\sum_e\sum_a\mathbf{P}(B,e,a,j,m)$$



Rescrever entradas da distribuição conjunta recorrendo ao produto de entradas da CPT:

$$\mathbf{P}(B|j,m)$$
$$= \alpha\sum_e\sum_a\mathbf{P}(B)P(e)\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$$
$$= \alpha\mathbf{P}(B)\sum_e P(e)\sum_a\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a) \qquad (expr1)$$

Enumeração recursiva em profundidade primeiro: espaço $O(n)$, tempo $O(d^n)$

Inferência por enumeração

Vamos fazer $B = true$ em $expr1$ (ignorando α):

$$\mathbf{P}(B = true)\sum_{e\in\{true,false\}}P(E = e)\sum_{a\in\{true,false\}}\mathbf{P}(A = a|B = true, E = e)P(J = true|A = a)P(M = true|A = a)$$
$$= 0.001 \times [0.002 \times (0.95 \times 0.9 \times 0.7 + 0.05 \times 0.05 \times 0.01)$$
$$+0.998 \times (0.94 \times 0.9 \times 0.7 + 0.06 \times 0.05 \times 0.01)] = 0,000592243$$

Vamos fazer $B = false$ em $expr1$ (ignorando α):

$$\mathbf{P}(B = false)\sum_{e\in\{true,false\}}P(E = e)\sum_{a\in\{true,false\}}\mathbf{P}(A = a|B = false, E = e)P(J = true|A = a)P(M = true|A = a)$$
$$= 0.999 \times [0.002 \times (0.29 \times 0.9 \times 0.7 + 0.71 \times 0.05 \times 0.01)$$
$$+0.998 \times (0.001 \times 0.9 \times 0.7 + 0.999 \times 0.05 \times 0.01)] = 0,001491858$$

Portanto normalizando, obtemos:

$$\mathbf{P}(B = true|J = true, M = true) = \frac{0,000592243}{0,000592243+0,001491858} = 0,284171835$$
$$\mathbf{P}(B = false|J = true, M = true) = \frac{0,001491858}{0,000592243+0,001491858} = 0,715828165$$

Algoritmo de enumeração

function ENUMERATION-ASK(X, **e**, bn) **returns** a distribution over X
  inputs: X, the query variable
    e, observed values for variables **E**
    bn, a Bayesian network with variables $\{X\} \cup \mathbf{E} \cup \mathbf{Y}$

  $\mathbf{Q}(X) \leftarrow$ a distribution over X, initially empty
  for each value x_i of X **do**
    extend **e** with value x_i for X
    $\mathbf{Q}(x_i) \leftarrow$ ENUMERATE-ALL(VARS[bn], **e**)
  return NORMALIZE($\mathbf{Q}(X)$)

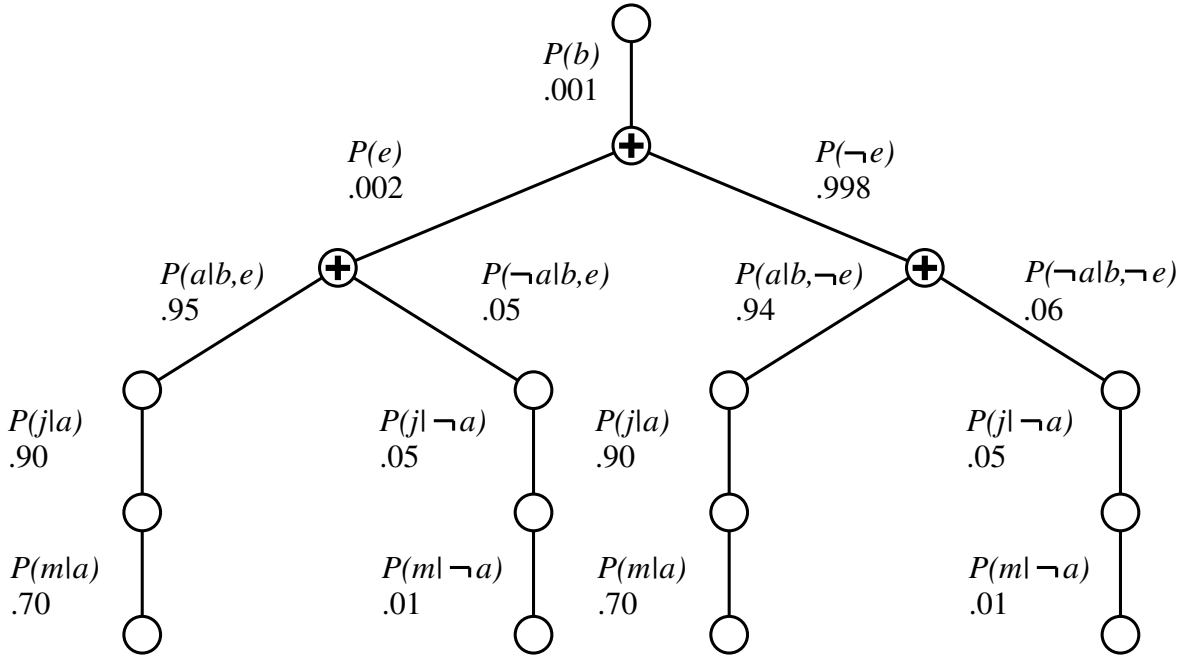
---

function ENUMERATE-ALL($vars$, **e**) **returns** a real number
  if EMPTY?($vars$) **then return** 1.0
  $Y \leftarrow$ FIRST($vars$)
  if Y has value y in **e**
    then return $P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), **e**)
    else return $\sum_y P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), $\mathbf{e}_y$)
      where $\mathbf{e}_y$ is **e** extended with $Y = y$

Árvore de avaliação

Enumeração é ineficiente: cálculos repetidos

e.g., calcula $P(j|a)P(m|a)$ para cada valor de e



Inferência por eliminação de variáveis

Eliminação de variáveis: efectuar somatórios da direita para a esquerda, armazenando resultados intermédios (factores) para evitar recomputação

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(B|j,m) \\
&\quad = \alpha \underbrace{\mathbf{P}(B)}_{B} \sum_e \underbrace{P(e)}_{E} \sum_a \underbrace{\mathbf{P}(a|B,e)}_{A} \underbrace{P(j|a)}_{J} \underbrace{P(m|a)}_{M} \\
&\quad = \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \mathbf{P}(a|B,e) P(j|a) f_M(a) \\
&\quad = \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \mathbf{P}(a|B,e) f_J(a) f_M(a) \\
&\quad = \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a f_A(a,B,e) f_J(a) f_M(a) \\
&\quad = \alpha \mathbf{P}(B) \sum_e P(e) f_{\bar{A}JM}(B,e) \text{ (soma-se } A\text{)} \\
&\quad = \alpha \mathbf{P}(B) f_{\bar{E}\bar{A}JM}(B) \text{ (soma-se } E\text{)} \\
&\quad = \alpha f_B(B) \times f_{\bar{E}\bar{A}JM}(B)
\end{aligned}$$

Eliminação de variáveis: operações básicas

Somar para eliminar a variável de um produto de factores:

deslocar todos os factores contantes para fora do somatório

adicionar submatrizes no produto pontual dos factores restantes

$$\sum_x f_1 \times \cdots \times f_k = f_1 \times \cdots \times f_i \sum_x f_{i+1} \times \cdots \times f_k = f_1 \times \cdots \times f_i \times f_{\bar{X}}$$

assumindo que $f_1, \ldots, f_i$ não depende de X

Produto pontual dos factores f_1 e f_2:

$$f_1(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k) \times f_2(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$$
$$= f(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$$

E.g., $f_1(a, b) \times f_2(b, c) = f(a, b, c)$

Algoritmo de eliminação de variáveis

function ELIMINATION-ASK(X, **e**, bn) **returns** a distribution over X
  inputs: X, the query variable
    e, evidence specified as an event
    bn, a belief network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$
  $factors \leftarrow [\,]$; $vars \leftarrow$ REVERSE(VARS[bn])
  for each var **in** $vars$ **do**
    $factors \leftarrow [$MAKE-FACTOR(var, **e**)$|factors]$
    if var is a hidden variable **then** $factors \leftarrow$ SUM-OUT($var, factors$)
  return NORMALIZE(POINTWISE-PRODUCT($factors$))

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: []

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_M(A)]$

Factor da variável M: $f_M(A) = P(M = true|A)$

A	$f_M(A)$
$true$	0.70
$false$	0.01

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_J(A), f_M(A)]$

Factor da variável J: $f_J(A) = P(J = true|A)$

A	$f_J(A)$
$true$	0.90
$false$	0.05

A	$f_M(A)$
$true$	0.70
$false$	0.01

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_A(A, B, E), f_J(A), f_M(A)]$

Factor da variável A: $f_A(A, B, E) = P(A|B, E)$

A	B	E	$f_A(A, B, E)$
$true$	$true$	$true$	0.95
$true$	$true$	$false$	0.94
$true$	$false$	$true$	0.29
$true$	$false$	$false$	0.001
$false$	$true$	$true$	0.05
$false$	$true$	$false$	0.06
$false$	$false$	$true$	0.71
$false$	$false$	$false$	0.999

A	$f_J(A)$
$true$	0.90
$false$	0.05

A	$f_M(A)$
$true$	0.70
$false$	0.01

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_A(A, B, E), f_J(A), f_M(A)]$

Como a variável A é oculta vai-se eliminá-la (através da soma). Para isso é necessário:

- Efectuar o produto pontual dos factores que têm o parâmetro A

$$f_{AJM}(A, B, E) = f_A(A, B, E) \times f_J(A) \times f_M(A)$$

- Eliminar a variável A obtendo o factor $f_{\overline{A}JM}(B, E)$

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_A(A, B, E), f_J(A), f_M(A)]$

Produto pontual: $f_{AJM}(A, B, E) = f_A(A, B, E) \times f_{JM}(A)$

$f_{JM}(A) = f_J(A) \times f_M(A)$

A	$f_{JM}(A)$
$true$	$0.90 \times 0.70 = 0.63$
$false$	$0.05 \times 0.01 = 0.0005$

$=$

A	$f_J(A)$
$true$	0.90
$false$	0.05

$\times$

A	$f_M(A)$
$true$	0.70
$false$	0.01

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_A(A, B, E), f_J(A), f_M(A)]$

Produto pontual: $f_{AJM}(A, B, E) = f_A(A, B, E) \times f_{JM}(A)$

A	B	E	$f_{AJM}(A, B, E)$
$true$	$true$	$true$	$0.95 \times 0.63 = 0.5985$
$true$	$true$	$false$	0.5922
$true$	$false$	$true$	0.1827
$true$	$false$	$false$	0.00063
$false$	$true$	$true$	0.000025
$false$	$true$	$false$	0.00003
$false$	$false$	$true$	0.000355
$false$	$false$	$false$	0.0004995

$=$

A	B	E	$f_A(A, B, E)$
$true$	$true$	$true$	0.95
$true$	$true$	$false$	0.94
$true$	$false$	$true$	0.29
$true$	$false$	$false$	0.001
$false$	$true$	$true$	0.05
$false$	$true$	$false$	0.06
$false$	$false$	$true$	0.71
$false$	$false$	$false$	0.999

$\times$

A	$f_{JM}(A)$
$true$	$0.90 \times 0.70 = 0.63$
$false$	$0.05 \times 0.01 = 0.0005$

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_{\overline{A}JM}(B, E)]$

Eliminação por soma da variável A: $f_{\overline{A}JM}(B, E)$

B	E	$f_{\overline{A}JM}(B, E)$
$true$	$true$	$0.5985 + 0.000025 = 0.598525$
$true$	$false$	$0.5922 + 0.00003 = 0.59223$
$false$	$true$	$0.1827 + 0.000355 = 0.183055$
$false$	$false$	$0.00063 + 0.0004995 = 0.00113$

$= SUM_A$

A	B	E	$f_{AJM}(A, B, E)$
$true$	$true$	$true$	0.5985
$true$	$true$	$false$	0.5922
$true$	$false$	$true$	0.1827
$true$	$false$	$false$	0.00063
$false$	$true$	$true$	0.000025
$false$	$true$	$false$	0.00003
$false$	$false$	$true$	0.000355
$false$	$false$	$false$	0.0004995

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_B(B), f_{\overline{A}JM}(B, E)]$

Factor da variável B: $f_B(B) = P(B)$

B	$f_B(B)$
$true$	0.001
$false$	0.999

B	E	$f_{\overline{A}JM}(B, E)$
$true$	$true$	0.598525
$true$	$false$	0.59223
$false$	$true$	0.183055
$false$	$false$	0.00113

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_E(E), f_B(B), f_{\overline{A}JM}(B, E)]$

Factor da variável E: $f_E(E) = P(E)$

E	$f_E(E)$
$true$	0.002
$false$	0.998

B	$f_B(B)$
$true$	0.001
$false$	0.999

B	E	$f_{\overline{A}JM}(B, E)$
$true$	$true$	0.598525
$true$	$false$	0.59223
$false$	$true$	0.183055
$false$	$false$	0.00113

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores: $[f_B(B), f_{\overline{EA}JM}(B)]$

Eliminação da variável E: $f_{\overline{EA}JM}(B) = SUM_E\left(f_E(E) \times f_{\overline{A}JM}(B,E)\right)$

B	E	$f_{E\overline{A}JM}(B,E)$
$true$	$true$	$0.002 \times 0.598525 = 0.001197$
$true$	$false$	$0.998 \times 0.59223 = 0.591046$
$false$	$true$	$0.002 \times 0.183055 = 0.000366$
$false$	$false$	$0.998 \times 0.00113 = 0.001127$

$=$

E	$f_E(E)$
$true$	0.002
$false$	0.998

$\times$

B	E	$f_{\overline{A}JM}(B,E)$
$true$	$true$	0.598525
$true$	$false$	0.59223
$false$	$true$	0.183055
$false$	$false$	0.00113

Factores finais:

B	$f_B(B)$
$true$	0.001
$false$	0.999

B	$f_{\overline{EA}JM}(B)$
$true$	$0.001197 + 0.591046 = 0.592243$
$false$	$0.000366 + 0.001127 = 0.001493$

Algoritmo de elim. de variáveis exemplificado

Variável de Interrogação: $Burglary$
Evidência: $JohnCalls = true$, $MaryCalls = true$
Ordenação das variáveis (das folhas para a raiz): M, J, A, B, E
Factores finais: $[f_B(B), f_{\overline{EA}JM}(B)]$

Cálculos finais: $f_{B\overline{EA}JM}(B) = f_B(B) \times f_{\overline{EA}JM}(B)$

B	$f_{B\overline{EA}JM}(B)$
$true$	$0.001 \times 0.592243 = 0.000592243$
$false$	$0.999 \times 0.001493 = 0.001491858$

$=$

B	$f_B(B)$
$true$	0.001
$false$	0.999

$\times$

B	$f_{\overline{EA}JM}(B)$
$true$	0.592243
$false$	0.001493

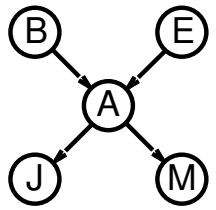
Resultado $P(B|JohnCalls = true, MaryCalls = true) = Normalize(f_{B\overline{EA}JM}(B))$

B	$P(B\|J = true, M = true)$
$true$	$\frac{0.000592243}{0.000592243+0.001491858} = 0.284172$
$false$	$\frac{0.001491858}{0.000592243+0.001491858} = 0.715828$

Variáveis irrelevantes

Considere-se a interrogação $P(JohnCalls|Burglary = true)$

$$P(J|b) = \alpha P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b,e) P(J|a) \sum_m P(m|a)$$



A soma de m é igual 1; M é **irrelevante** para a interrogação

Teorema 1: Y é irrelevante a não ser que $Y \in Ancestors(\{X\} \cup \mathbf{E})$

Fazendo $X = JohnCalls$, $\mathbf{E} = \{Burglary\}$, e
$Ancestors(\{X\} \cup \mathbf{E}) = \{Alarm, Earthquake\}$
conclui-se que M é irrelevante

(Compare-se com o método de encadeamento para trás a partir da interrogação em KBs de cláusulas de Horn)

Complexidade da inferência exacta

Redes singularmente conexas (ou polytrees):

– quaisquer dois nós estão ligados no máximo por um caminho (não dirigido)

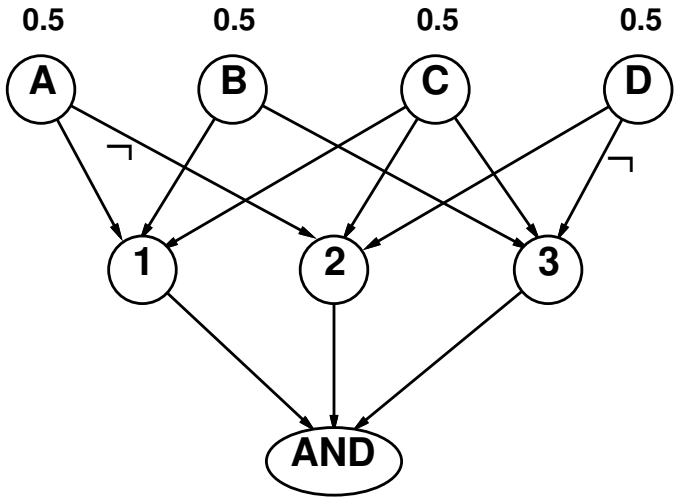
– complexidade temporal e espacial da eliminação de variáveis é $O(d^k n)$

Redes multiplamente conexas:

– pode-se reduzir 3SAT a inferência exacta $\Rightarrow$ NP-difícil

– equivalente **contar** modelos 3SAT $\Rightarrow$ #P-completo

1. A v B v C
2. C v D v ¬A
3. B v C v ¬D



Inferência por simulação estocástica

Ideia básica:

1) Efectuar N amostras de uma distribuição de amostragem S

2) Calcular um probabilidade a posteriori aproximada $\hat{P}$

3) Mostrar que processo converge para a probabilidade real P

Métodos:

– Amostragem a partir de uma rede vazia

– Amostragem por rejeição: rejeitar amostras que não estão de acordo com evidência

– Pesagem por Verosimilhança: utilizar evidência para pesar amostras

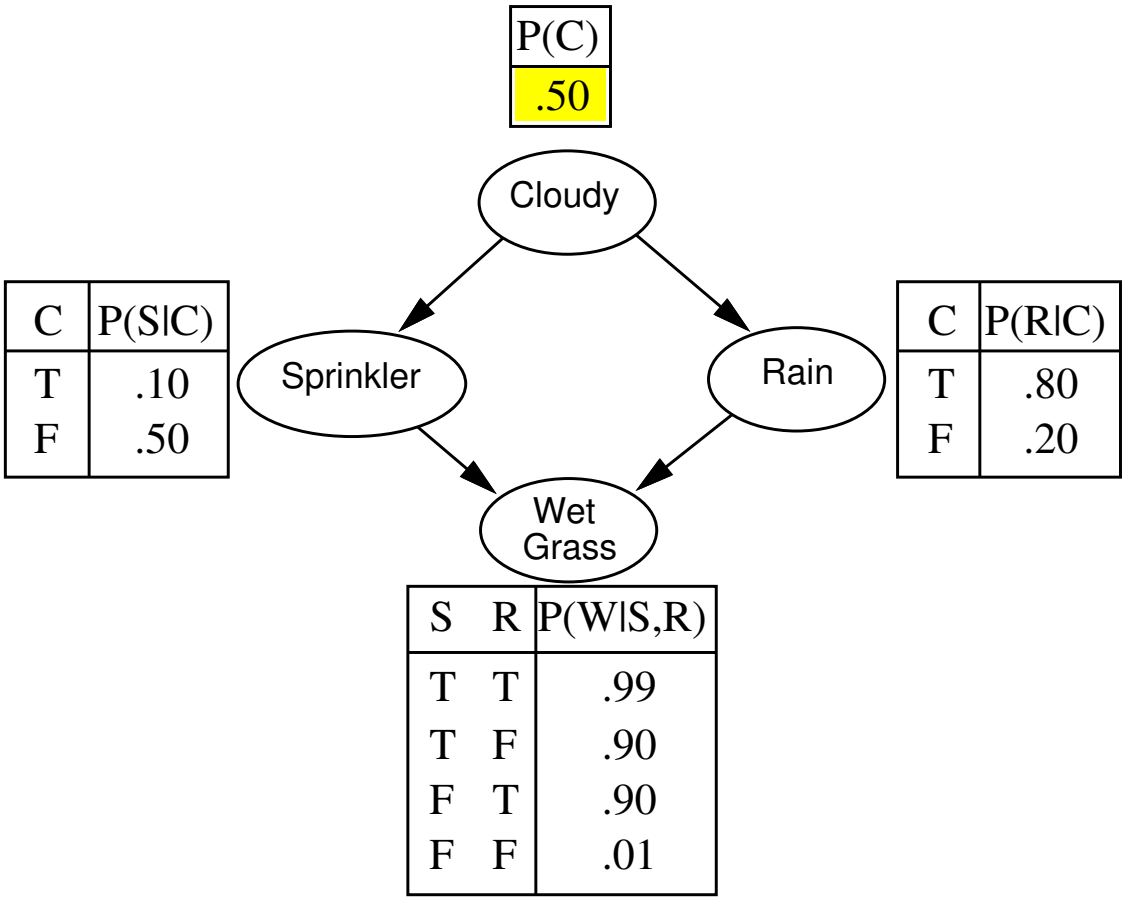
– Markov chain Monte Carlo (MCMC): amostrar a partir de um processo estocástico cuja distribuição estacionária é a probabilidade a posteriori real

Amostragem a partir de uma rede vazia

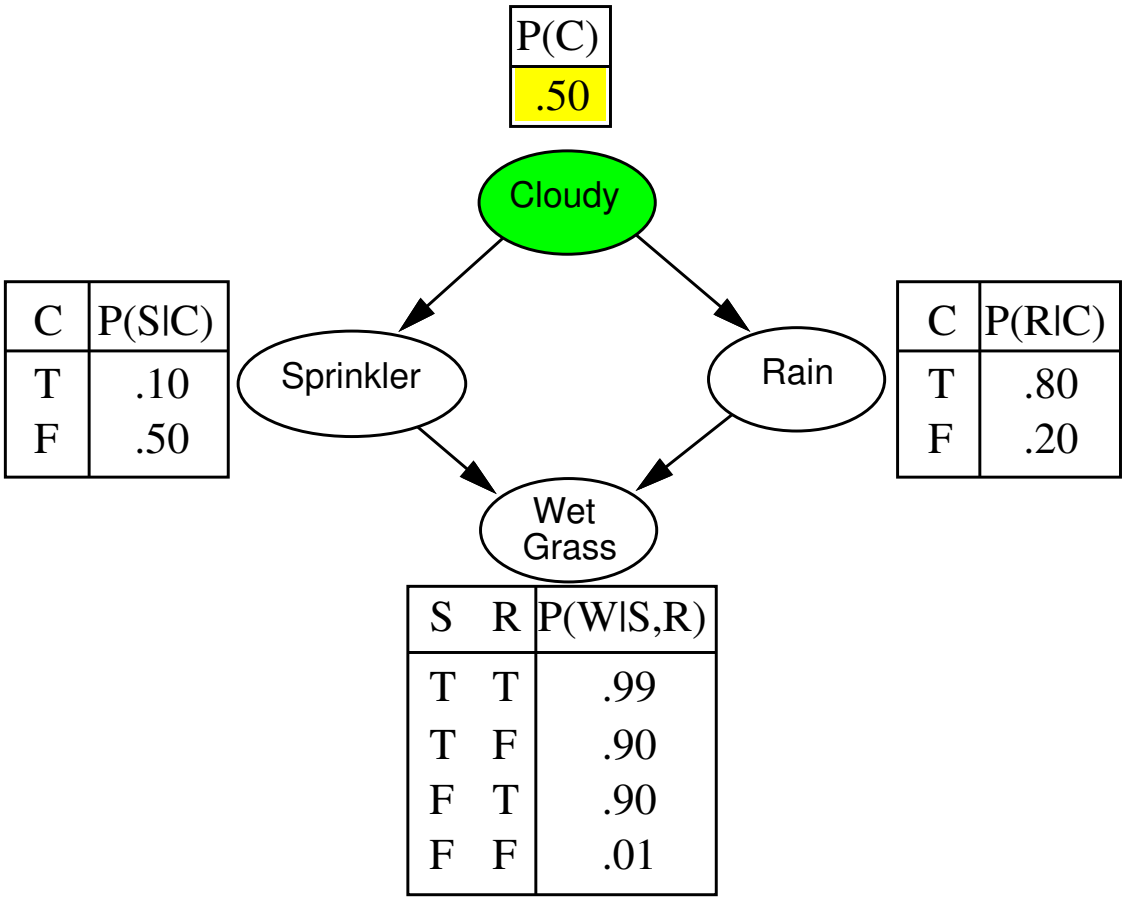
function PRIOR-SAMPLE(bn) **returns** an event sampled from bn
  inputs: bn, a belief network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$

  $\mathbf{x} \leftarrow$ an event with n elements
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$
  return x

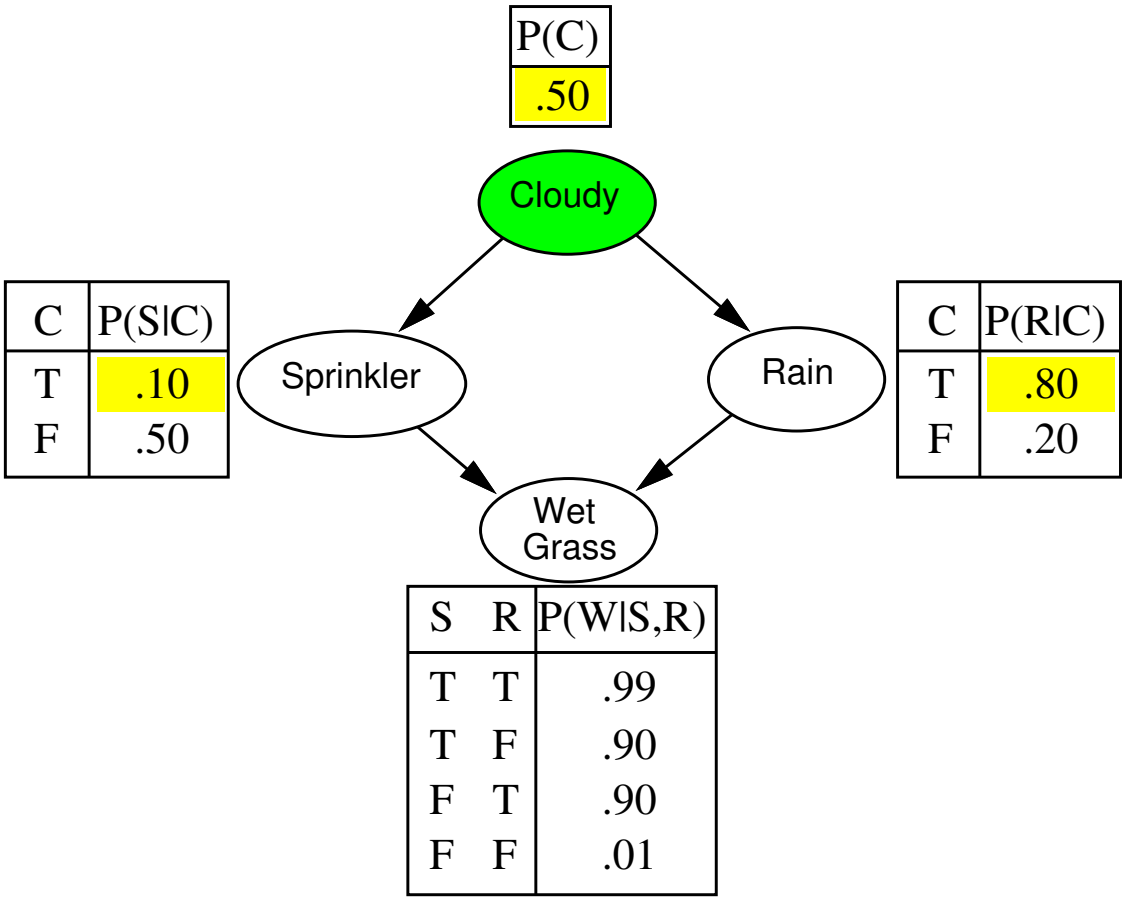
Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

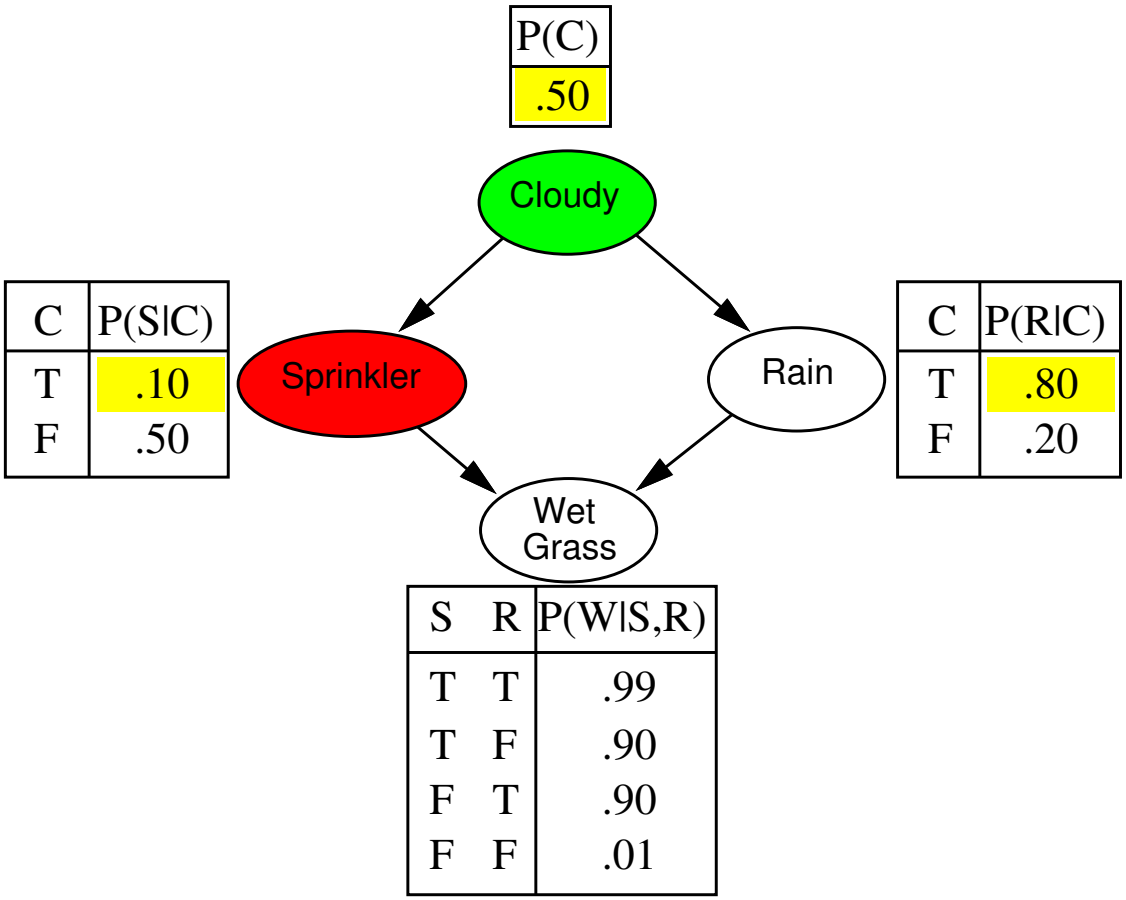
Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

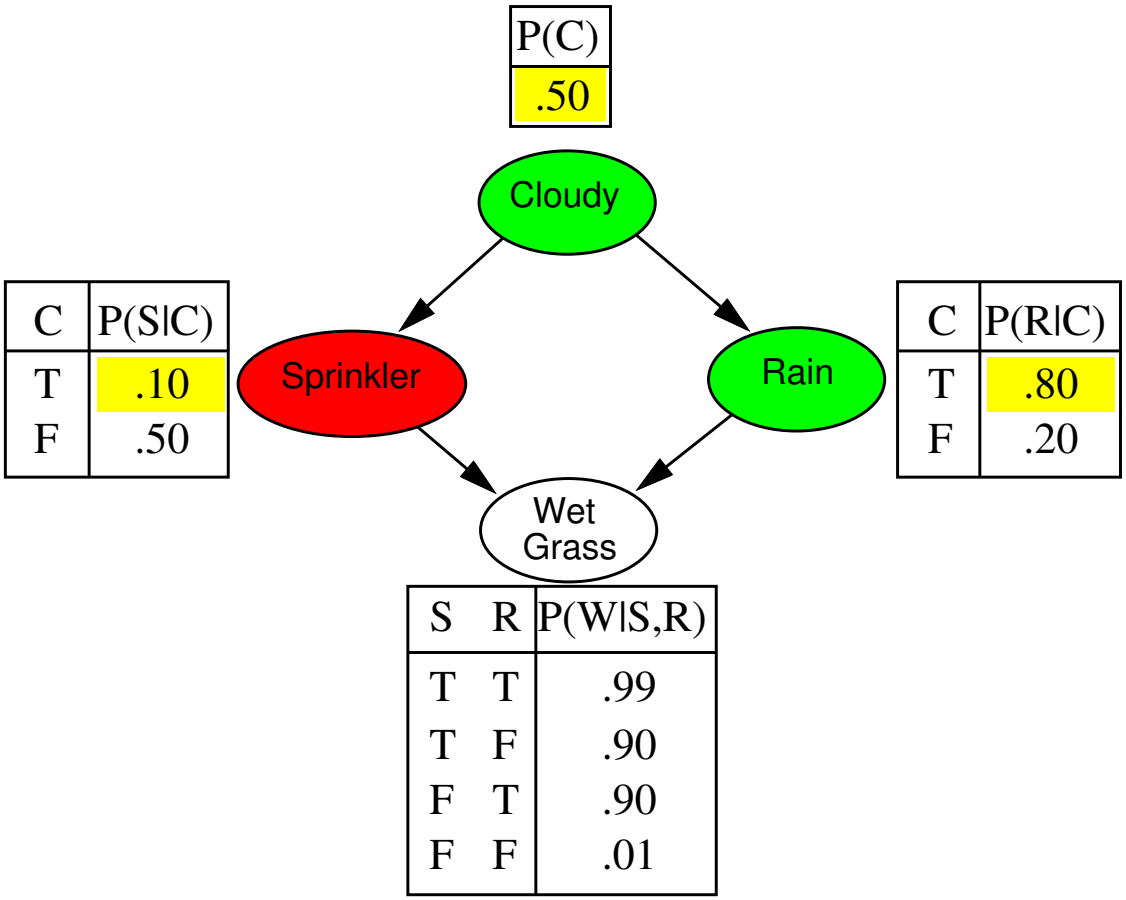
Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

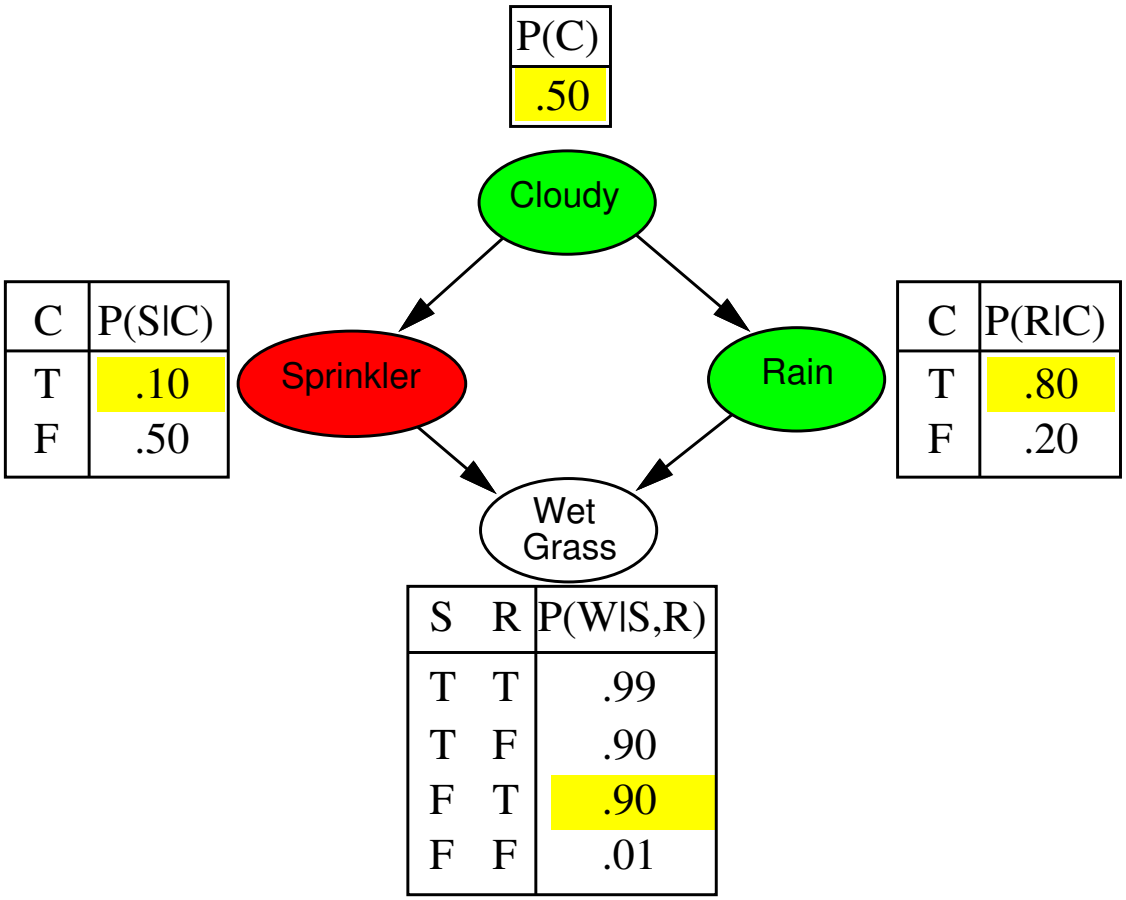
Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

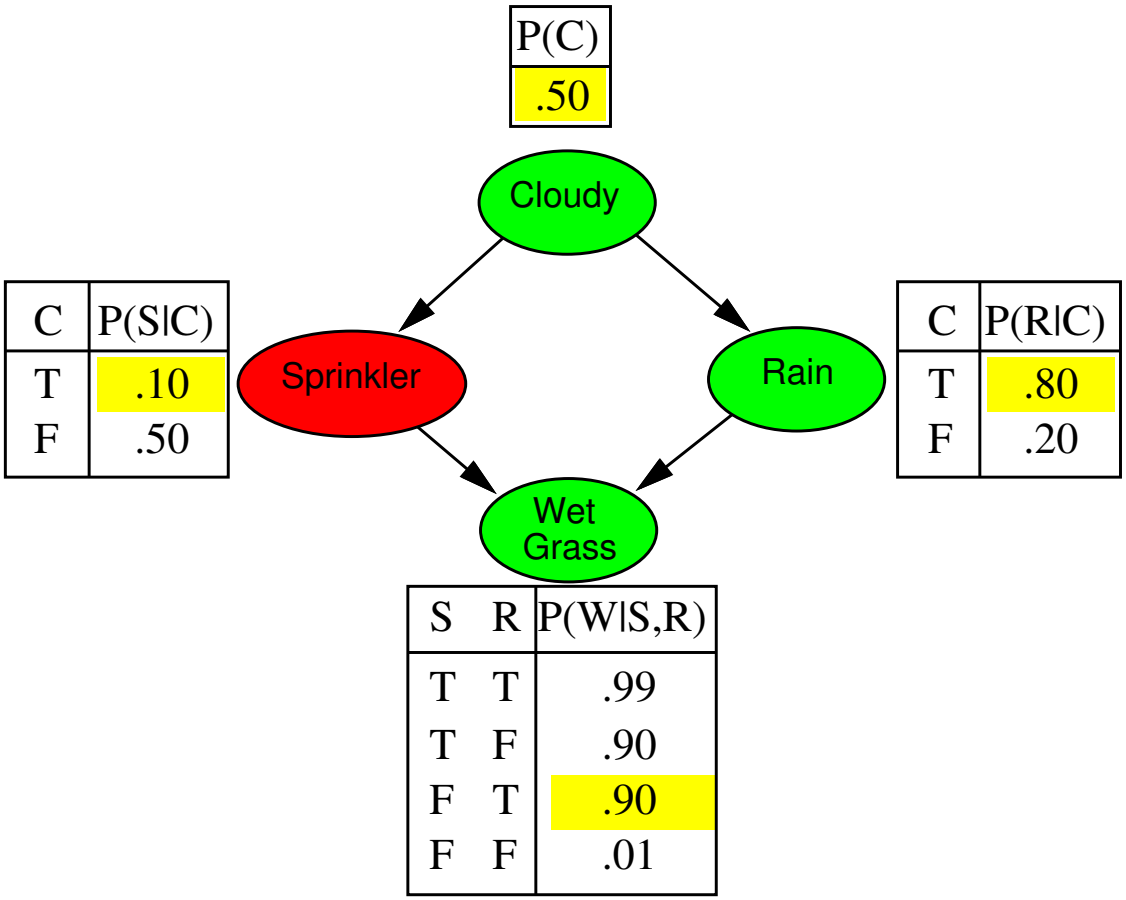
Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C
P(S|C)
T
.10
F
.50
Sprinkler
Rain
C
P(R|C)
T
.80
F
.20
Wet Grass
S
R
P(W|S,R)
T
T
.99
T
F
.90
F
T
.90
F
F
.01

Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

Exemplo


P(C)
.50
Cloudy
C P(S|C)
T .10
F .50
Sprinkler
Rain
C P(R|C)
T .80
F .20
Wet Grass
S R P(W|S,R)
T T .99
T F .90
F T .90
F F .01

Amostragem a partir de uma rede vazia (cont.)

Probabilidade de PriorSample gerar um acontecimento particular

$$S_{PS}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|Parents(X_i)) = P(x_1 \ldots x_n)$$

i.e., a probabilidade a priori real

E.g., $S_{PS}(t, f, t, t) = 0.5 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.9 = 0.324 = P(t, f, t, t)$

Seja $N_{PS}(x_1 \ldots x_n)$ o número de amostras geradas para o acontecimento $x_1, \ldots, x_n$

Então obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \hat{P}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{N\to\infty} N_{PS}(x_1, \ldots, x_n)/N \\ &= S_{PS}(x_1, \ldots, x_n) \\ &= P(x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

Ou seja, estimativas derivadas de PriorSample são consistentes

Abreviadamente: $\hat{P}(x_1, \ldots, x_n) \approx P(x_1 \ldots x_n)$

Amostragem por rejeição

$\hat{\mathbf{P}}(X|\mathbf{e})$ estimado das amostras que concordam com $\mathbf{e}$

function REJECTION-SAMPLING($X, \mathbf{e}, bn, N$) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{N}$, a vector of counts over X, initially zero

  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{x} \leftarrow$ PRIOR-SAMPLE(bn)
    if $\mathbf{x}$ is consistent with $\mathbf{e}$ **then**
      $\mathbf{N}[x] \leftarrow \mathbf{N}[x]+1$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{N}[X]$)

E.g., estimar $\mathbf{P}(Rain|Sprinkler = true)$ utilizando 100 amostras

27 amostras têm $Sprinkler = true$

Destas, 8 têm $Rain = true$ e 19 têm $Rain = false$.

$\hat{\mathbf{P}}(Rain|Sprinkler = true) = \text{NORMALIZE}(\langle 8, 19\rangle) = \langle 0.296, 0.704\rangle$

Semelhante aos procedimentos empíricos de estimativa

Análise da amostragem por rejeição

$\hat{\mathbf{P}}(X|\mathbf{e}) = \alpha \mathbf{N}_{PS}(X,\mathbf{e})$ (algoritmo defn.)
$= \mathbf{N}_{PS}(X,\mathbf{e})/N_{PS}(\mathbf{e})$ (normalizado por $N_{PS}(\mathbf{e})$)
$\approx \mathbf{P}(X,\mathbf{e})/P(\mathbf{e})$ (propriedade de PriorSample)
$= \mathbf{P}(X|\mathbf{e})$ (defn. de probabilidade condicional)

Logo amostragem por rejeição devolve estimativas consistentes da probabilidade a posteriori

Problema: terrivelmente ineficiente se $P(\mathbf{e})$ é pequeno

$P(\mathbf{e})$ diminui exponencialmente com o número de variáveis evidência!

Pesagem por verosimilhança

Ideia: fixar variáveis evidência, amostrar apenas as outras variáveis,
e pesar cada amostra pela verosimilhança de acordo com a evidência

function LIKELIHOOD-WEIGHTING($X, \mathbf{e}, bn, N$) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{W}$, a vector of weighted counts over X, initially zero

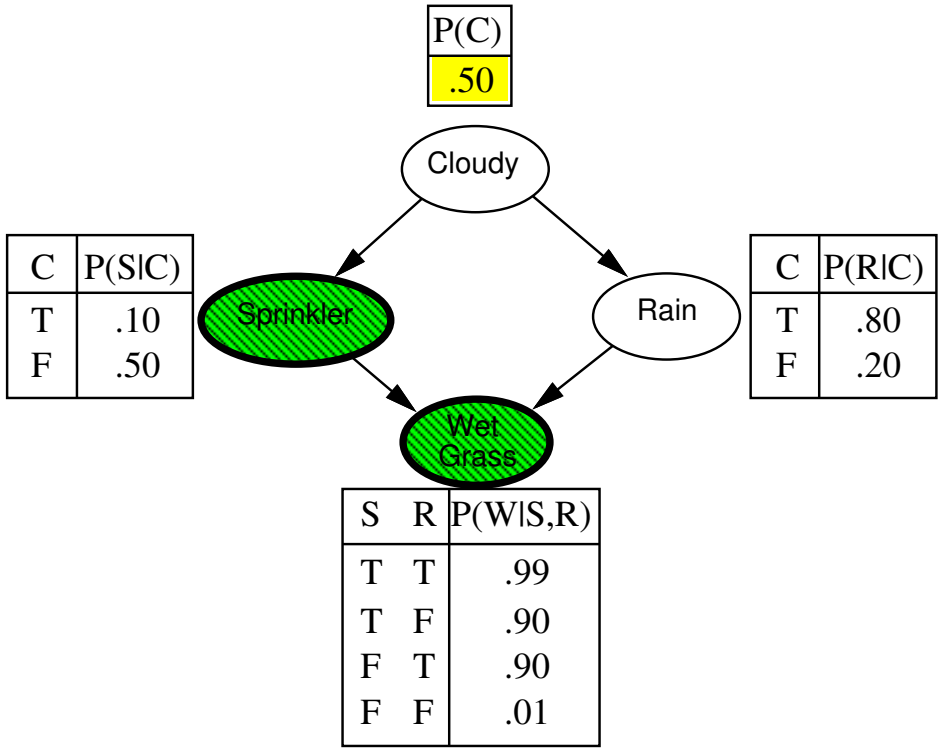
  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{x}, w \leftarrow$ WEIGHTED-SAMPLE(bn)
    $\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{W}[X]$)

---

function WEIGHTED-SAMPLE($bn, \mathbf{e}$) **returns** an event and a weight

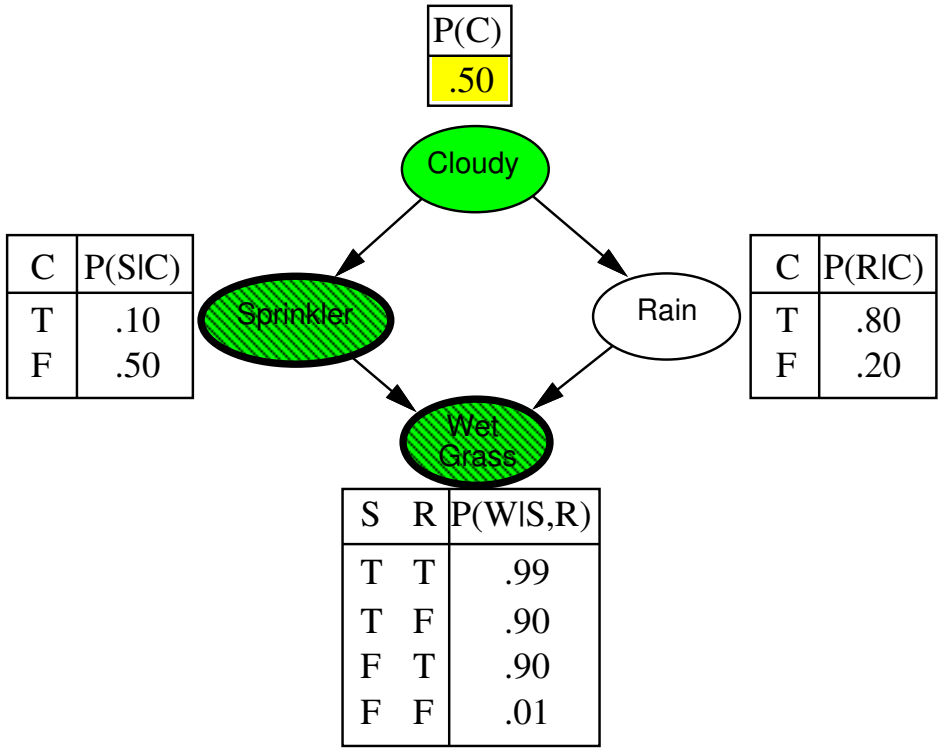
  $\mathbf{x} \leftarrow$ an event with n elements; $w \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    if X_i has a value x_i in $\mathbf{e}$
      then $w \leftarrow w \times P(X_i = x_i \mid Parents(X_i))$
      else $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$
  return $\mathbf{x}$, w

Exemplo de pesagem por verosimilhança



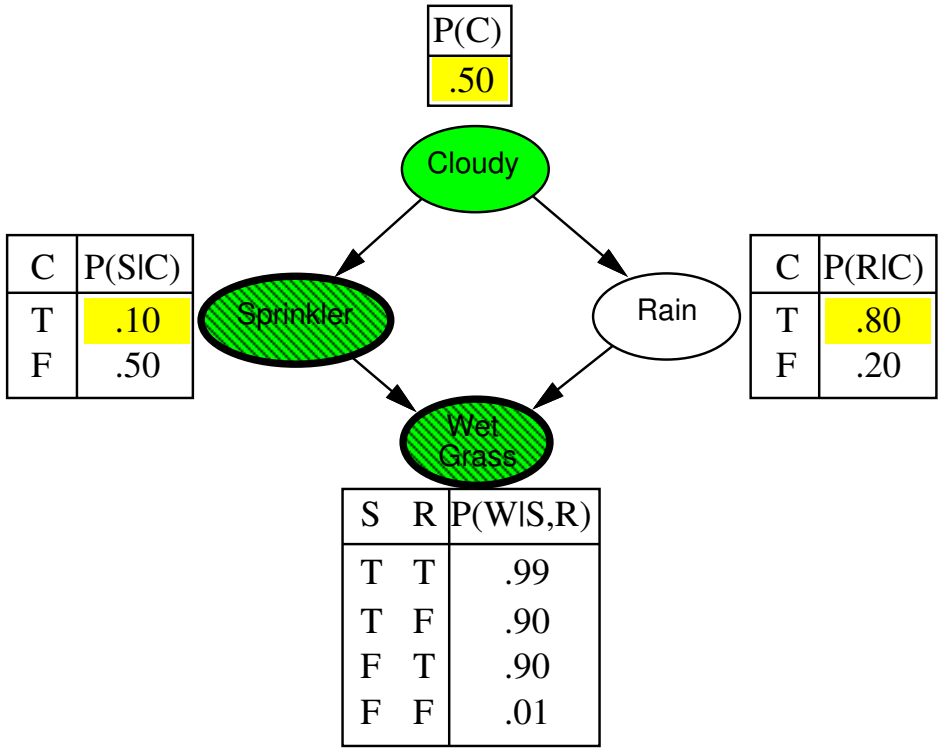
$w = 1.0$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



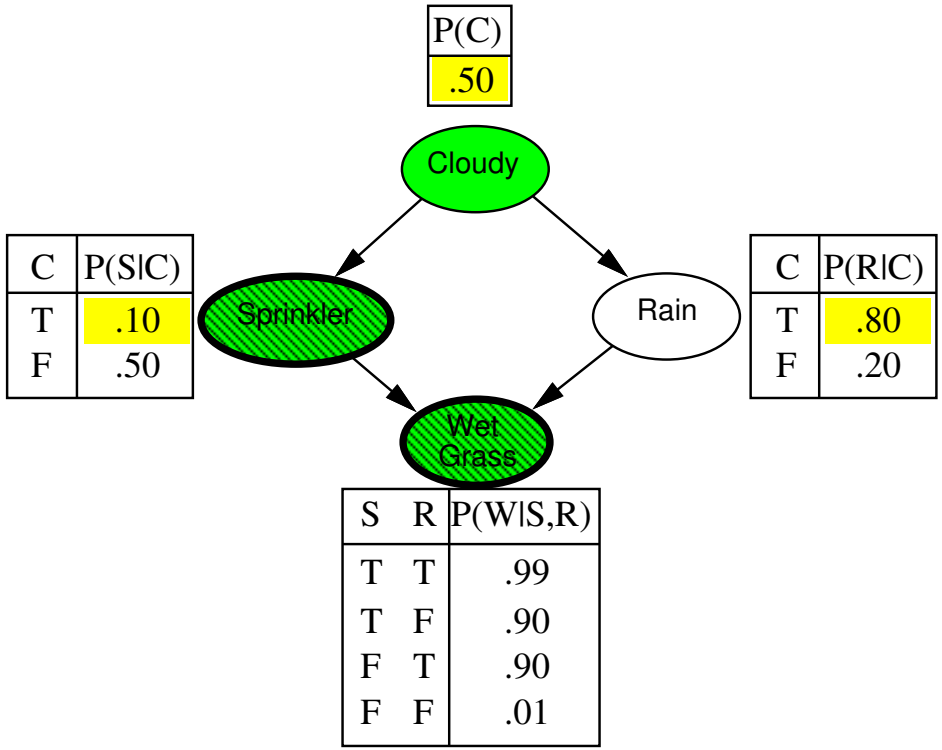
$w = 1.0$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



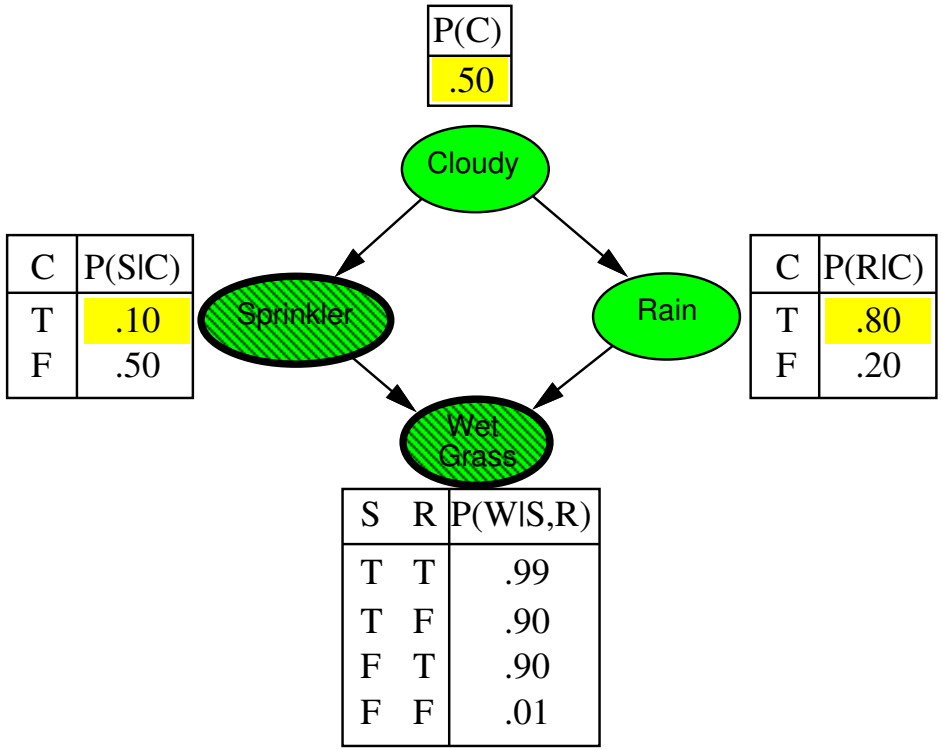
$w = 1.0$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



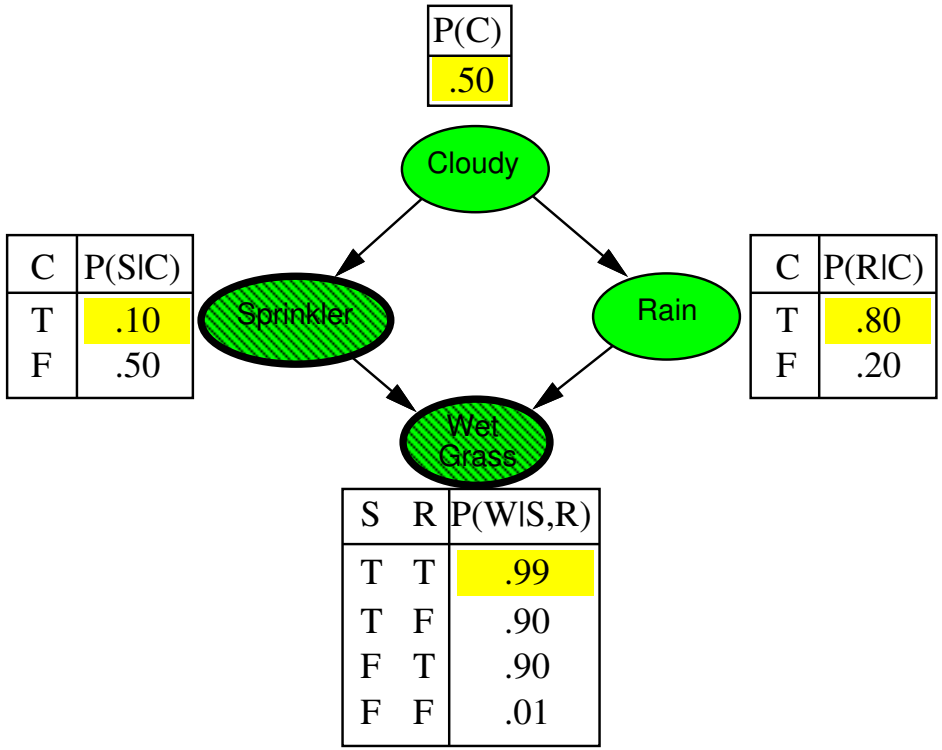
$w = 1.0 \times 0.1$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



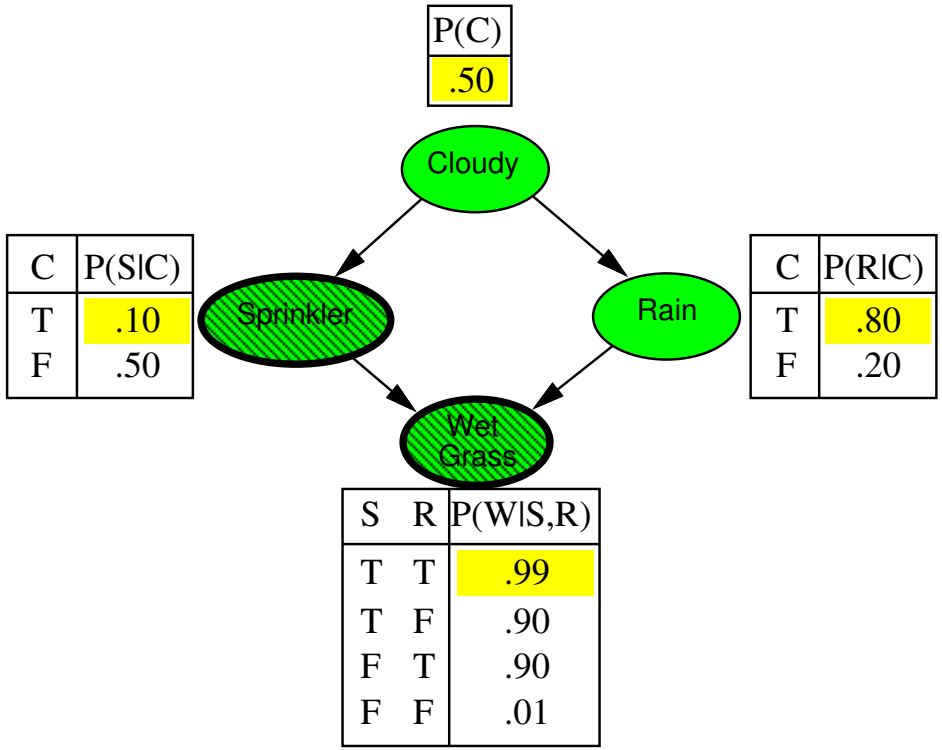
$w = 1.0 \times 0.1$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



$w = 1.0 \times 0.1$

Exemplo de pesagem por verosimilhança



$w = 1.0 \times 0.1 \times 0.99 = 0.099$

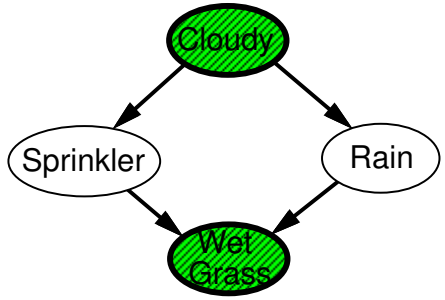
Análise de pesagem por verosimilhança

Probabilidade de amostragem de WeightedSample é

$$S_{WS}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i | Parents(Z_i))$$

Nota: só entra em conta apenas com a evidência dos **antecessores**

$\Rightarrow$ algures "entre" a distribuição a priori e a posteriori



Peso para uma dada amostra $\mathbf{z}, \mathbf{e}$ é

$$w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{m} P(e_i | Parents(E_i))$$

Probabilidade de amostragem pesada é

$$\begin{aligned} &S_{WS}(\mathbf{z}, \mathbf{e}) w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) \\ &= \prod_{i=1}^{l} P(z_i | Parents(Z_i)) \prod_{i=1}^{m} P(e_i | Parents(E_i)) \\ &= P(\mathbf{z}, \mathbf{e}) \text{ (pela semântica global da rede)} \end{aligned}$$

Portanto a pesagem por verosimilhança retorna estimativas consistentes mas o desempenho continua a degradar-se com muitas variáveis evidência porque algumas amostras têm quase todo o peso total

Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

"Estado" da rede = atribuição corrente a todas as variáveis.

Gerar o estado seguinte amostrando uma variável dado o seu Markov blanket
Altera-se uma variável de cada vez, por amostragem, mantendo a evidência.

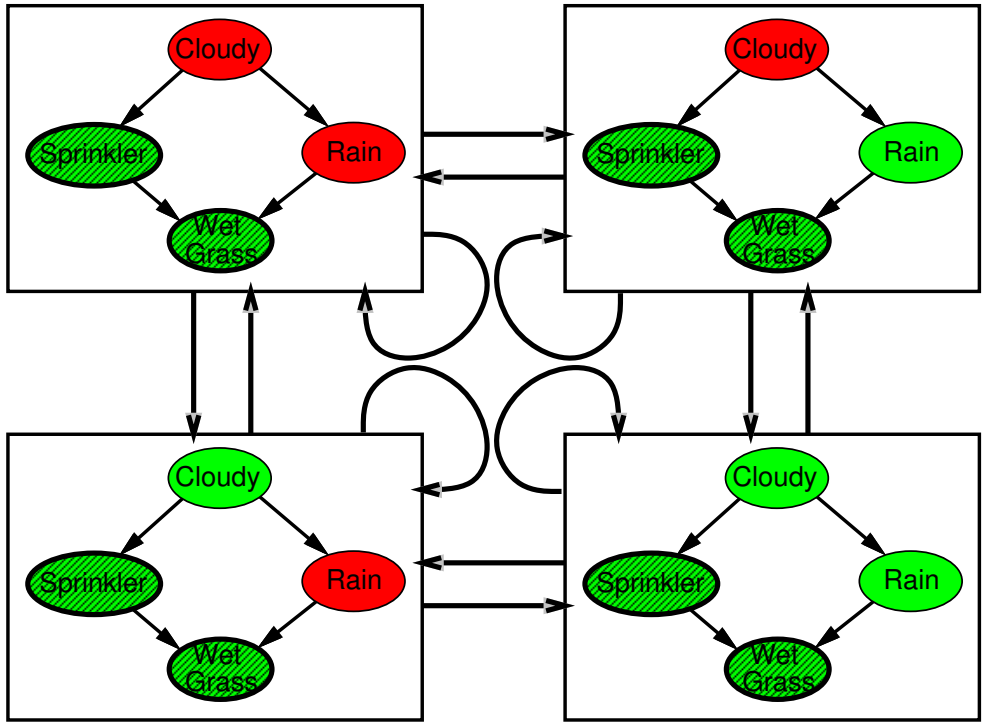
function MCMC-ASK($X, \mathbf{e}, bn, N$) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{N}[X]$, a vector of counts over X, initially zero
    $\mathbf{Z}$, the nonevidence variables in bn
    $\mathbf{x}$, the current state of the network, initially copied from $\mathbf{e}$

  initialize $\mathbf{x}$ with random values for the variables in $\mathbf{Z}$
  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{N}[x] \leftarrow \mathbf{N}[x] + 1$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
    for each Z_i in $\mathbf{Z}$ **do**
      sample the value of Z_i in $\mathbf{x}$ from $\mathbf{P}(Z_i|MB(Z_i))$
      given the values of $MB(Z_i)$ in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{N}[X]$)

Pode-se também escolher aleatoriamente a variável a amostrar

A cadeia de Markov

Com $Sprinkler = true, WetGrass = true$, existem quatro estados:



Vagueia durante algum tempo, efectua a média do que observa

MCMC exemplo (cont.)

Estimar $\mathbf{P}(Rain|Sprinkler = true, WetGrass = true)$

Amostrar $Cloudy$ ou $Rain$ dado o seu Markov blanket, repetir.
Contar p número de vezes que $Rain$ é verdadeiro e falso nas amostras.

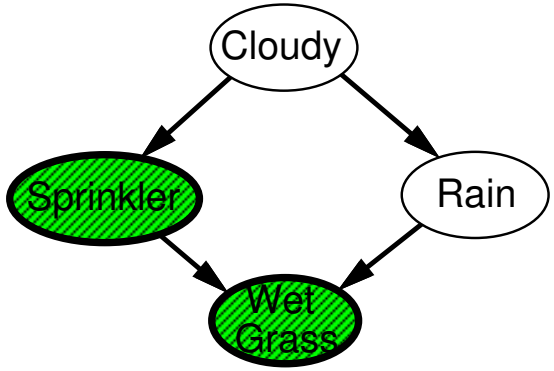
E.g., visita 100 estados
    31 tem $Rain = true$, 69 tem $Rain = false$

$\hat{\mathbf{P}}(Rain|Sprinkler = true, WetGrass = true)$
$= \textsc{Normalize}(\langle 31, 69\rangle) = \langle 0.31, 0.69\rangle$

Teorema: cadeia aproxima-se da distribuição estacionária :
    a fracção de tempo gasto em cada espaço é exactamente
    proporcional à sua probabilidade a posteriori

Amostragem do Markov blanket

Markov blanket de $Cloudy$ é
$Sprinkler$ e $Rain$
Markov blanket de $Rain$ é
$Cloudy$, $Sprinkler$, e $WetGrass$



Probabilidade dado o Markov blanket é obtida como se segue:

$$P(x'_i|MB(X_i)) = P(x'_i|Parents(X_i))\prod_{Z_j \in Children(X_i)} P(z_j|Parents(Z_j))$$

Facilmente implementável em sistemas paralelos de troca de mensagens, cérebros

Problemas computacionais principais:

1) Dificuldade em detectar que se atingiu a convergência
2) Pode ser dispendioso se Markov blanket é grande:
$P(X_i|MB(X_i))$ não varia muito

Sumário

Inferência exacta por eliminação de variáveis:

- tempo polonomial em polytrees, NP-difícil em grafos arbitrários
- espaço = tempo, muito sensível à topologia

Inferência aproximada por PV, MCMC:

- PV comporta-se mal quando existe muita evidência
- PV, MCMC geralmente insensíveis à topologia
- Convergência pode ser muito lenta com probabilidades perto de 0 ou 1
- Pode tratar combinações arbitrárias de variáveis discretas e contínuas

Extensões para linguagem de primeira ordem:

- Relational Probability Models (RPMs)
- Open Universe Probability Models (OUPMs)
- P-log extensão de ASP para lidar com probabilidades